4.3.9 Součtové vzorce II

Předpoklady: 040308

Př. 1: Odvoď součtový vzorec pro $\mathrm{tg}(x+y)$.

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=$$

Potřebujeme výraz upravit tak, aby obsahoval $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{tg}\,y$, kvůli rozdílu (neodstranitelném) ve jmenovateli půjde o zlomek $\Rightarrow$ musíme vytvořit $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{tg}\,y$ ve jmenovateli i čitateli $\Rightarrow$ vynásobíme čitatel i jmenovatel výrazem $\frac{1}{\cos x\cos y}$:

$$\frac{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$$

Pedagogická poznámka: Rozšíření zlomku výrazem $\cos x\cos y$ je studentům třeba poradit.

Př. 2: Odvoď součtový vzorec pro $\mathrm{tg}(x-y)$.

Problém: Odvození přes poměr $\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$ je příliš dlouhé $\Rightarrow$ použijeme $\mathrm{tg}(x-y)=\mathrm{tg}[x+(-y)]$.

$$\mathrm{tg}(x-y)=\mathrm{tg}[x+(-y)]=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}(-y)}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}(-y)}$$

Použijeme $\mathrm{tg}(-y)=-\mathrm{tg}\,y$ ($\mathrm{tg}\,x$ je lichá funkce).

$$\mathrm{tg}(x-y)=\mathrm{tg}[x+(-y)]=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}(-y)}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}(-y)}=\frac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$$

Př. 3: Urči přesnou hodnotu $\cos 75°$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty $30°$, $45°$, $60°$
$\Rightarrow$ zkusíme vyjádřit $75°$ sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $75°=45°+30°$.

$$\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cdot\cos 30°-\sin 45°\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Př. 4: Urči přesnou hodnotu $\sin 15°$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty $30°$, $45°$, $60°$
$\Rightarrow$ zkusíme vyjádřit $15°$ sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $15° = 45° - 30°$.

$$\sin 15° = \sin\left(45° - 30°\right) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Pedagogická poznámka: Můžete vyzvat studenty, aby vysvětlili shodu výsledků dvou předchozích příkladů, případně podiskutovat o způsobu, jak získat přesné hodnoty goniometrických funkcí v dalších bodech.

Př. 5: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty $\Rightarrow$ pomocí součtového vzorce rozložíme argument v cosinu, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze *x*.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 1$$

$$\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \sin x = 1$$

$$\cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 + \sin x = 1$$

$$2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\; x_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$K = \bigcup_{k \in Z}\left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty $\Rightarrow$ pomocí součtových vzorců rozložíme argumenty obou cosinů, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze *x*.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$$

$$\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = 1$$

$$\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$$

$$2\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x\sqrt{2} = 1$$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ čtvrtinové úhly v kladné polorovině na ose x $\Rightarrow$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 7: Vyřeš nerovnici: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Problém: Závorky u obou sinů se nerovnají, nemůžeme tedy substituovat $\Rightarrow$ rozložíme pomocí součtových vzorců.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} - \left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} - \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} > 0$$

$$2\cos x \sin\frac{\pi}{4} > 0$$

$$2\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$\cos x > 0$$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right)$$

Př. 8: Petáková:
strana 47, cvičení 55 a), c), e)
strana 54, cvičení 22 a), g), h)

Shrnutí: Součtové vzorce umožňují určit přesné hodnoty goniometrických funkcí i pro další netabulkové úhly (například $15° = 45° - 30°$).